

ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDĂANU

PRAVĂȚ CRISTIAN

DOINA NECHIFOR

MARIANA MORĂRĂSU

GABRIEL MÎRȘANU

JULIETA GRIGORAŞ

MATEMATICA

1225

**DE PROBLEME PENTRU
MICII MATEMATICIENI
CLASELE I - IV**



OLIMPIADE, CONCURSURI JUDEȚENE, INTERJUDEȚENE,

CENTRE DE EXCELENȚĂ

PREGĂTIREA ADMITERII ÎN CLASA a V-a

104 TESTE

Editura TAIDA

- IAȘI -

CUPRINS

	Bre-viar	Enun-țuri	Solu-ții
Argument			3
Capitolul I. Sisteme de numerație			
I.1. Sistemul roman de numerație	6		
I.2. Sistemul zecimal de numerație	8	15	180
Reconstituiri de operații prin jocuri cu chibrituri		24	188
Capitolul II. Împărțirea cu rest a numerelor naturale.			
Metoda reducerii la absurd	26	28	189
Capitolul III. Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor naturale. Factor comun. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	34	36	195
Capitolul IV. Siruri de numere naturale		42	199
Capitolul V. Probleme de numărare	50	53	204
Capitolul VI. Sume de tip Gauss	56	60	208
Capitolul VII. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică			
VII.1. Metoda reducerii la absurd	63	65	211
VII.2. Metoda comparației	67	69	212
VII.3. Metoda figurativă	71	76	214
VII.4. Metoda mersului invers	85	87	230
Probleme în care apar fracții din rest	90	94	
Probleme în care intervin cel puțin două necunoscute ...	95	96	
VII.5. Metoda falsei ipoteze (presupunerii)	97	99	236
VII.6. Principiul cutiei	100	102	237
Capitolul VIII. Probleme cu conținut geometric	106	109	240
Capitolul IX. Olimpiade, concursuri județene și interjudețene.			
Concursuri pentru admiterea în clasa a V-a. 104 teste		113	242
Soluții. Indicații. Răspunsuri. Comentarii. Bareme de corectare și notare			180
Bibliografie selectivă			303

Probleme rezolvate

1. Mutăți un chibrit, la fiecare din operațiile de mai jos, astfel încât să obțineți rezultate corecte:

- a) $\text{IV} - \text{I} = \text{V}$; b) $\text{VII} + \text{I} = \text{V}$;
c) $\text{X} + \text{II} = \text{VII}$; d) $\text{IX} + \text{VII} = \text{I}$;
e) $\text{V} + \text{I} + \text{VII} = \text{I}$; f) $\text{X} + \text{II} + \text{II} = \text{IX}$;
g) $\text{X} + \text{III} + \text{V} = \text{XI}$; h) $\text{LX} + \text{XX} = \text{XC}$;

Rezolvare:

- a) $\text{IV} + \text{I} = \text{V}$; b) $\text{VII} - \text{I} = \text{VI}$;
c) $\text{X} - \text{II} = \text{VII}$ sau $\text{X} - \text{III} = \text{VII}$; d) $\text{IX} - \text{VII} = \text{II}$;
e) $\text{V} + \text{I} - \text{VII} = \text{I}$; f) $\text{X} - \text{II} + \text{II} = \text{X}$;
g) $\text{X} - \text{III} + \text{V} = \text{XI}$;

2. Calculați $1918 - 1859$ și scrieți rezultatul în sistemul roman de numerație.

Rezolvare:

$$\text{MCMXVIII} - \text{MDCCCLIX} = \text{LIX}.$$

I.2 SISTEMUL ZECIMAL DE NUMERAȚIE

- ⇒ Cifre arabe: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
⇒ Sistemul în care scriem numerele naturale este zecimal și pozitional pentru că:
1. Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.
2. Cifrele reprezintă valori diferite în raport cu poziția pe care o ocupă în scrierea numărului.

Exemple:

$$1000 + 300 + 40 + 5$$

$$1000000 + 200000 + 30000 + 4000 + 600 + 10 + 5$$

Rețineți!

⇒ Un număr natural de două cifre îl vom scrie sub forma \overline{ab} , unde a și b sunt cifre (a este diferită de 0).

Avem: $\overline{ab} = 10a + b$.

Exemplu: $23 = 2 \cdot 10 + 3$; $79 = 7 \cdot 10 + 9$; $80 = 8 \cdot 10 + 0$.

⇒ Un număr natural de trei cifre îl vom scrie sub forma \overline{abc} , unde a, b, c sunt cifre (a este diferită de 0).

Avem: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ (scrierea zecimală a numărului \overline{abc}).

$$235 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5.$$

⇒ Un număr natural de patru cifre îl vom scrie sub forma \overline{abcd} , unde a, b, c, d sunt cifre (a diferită de 0).

Avem: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ (scrierea zecimală a numărului \overline{abcd}).

$$2314 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4.$$

⇒ **Răsturnatul** numărului \overline{ab} este numărul \overline{ba} , dacă cifrele a și b sunt diferite de zero.

⇒ **Răsturnatul** numărului \overline{abc} este numărul \overline{cba} , dacă cifrele a și c sunt diferite de zero.

⇒ Sirul numerelor naturale este: 0; 1; 2; 3; ...; 9; 10; 11; ...; 99; 100; 101; ...

⇒ Există oricât de multe numere naturale (sirul numerelor naturale începe cu zero și este **nemărginit sau infinit**)

⇒ Oricare două numere naturale alăturate din sirul numerelor naturale se numesc **numere consecutive**.

⇒ Orice număr natural diferit de zero are un **precedesor** și un **succesor**.

Exemplu: Numărul 25 are ca predecesor pe 24 și ca succesor pe 26.

⇒ Numerele naturale n și $n + 1$ se numesc **numere consecutive**.

⇒ Numărând din 2 în 2, pornind de la 0, obținem sirul **numerelor pare**:

$$0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; \dots; 30; 32; \dots; 100; 102; \dots$$

⇒ Numerele pare au cifra unităților una din cifrele: 0; 2; 4; 6 sau 8.

⇒ Sirul numerelor naturale pare este tot **infinit**.

⇒ Numărând din 2 în 2, pornind de la 1, obținem sirul numerelor **naturale impare**: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; ...; 41; 43; 45; ...; 101; 103; 105; ...

⇒ Numerele din sirul numerelor naturale impare au cifra unităților 1, 3, 5, 7 sau 9.

⇒ Sirul numerelor naturale impare este tot **infinit**.

Probleme rezolvate

1. Victor, numărând din 2 în 2, a ajuns la numărul 384.

De la care dintre următoarele numere a pornit: 157; 182; 179; 171?

Rezolvare: Victor a pornit de la 182, deoarece ajunge la un număr par.

2. Câte numere pare și câte numere impare se află între: a) 1 și 40; b) 3 și 52; c) 0 și 20?

Rezolvare: a) 19 pare și 19 impar; b) 24 pare și 24 impar; c) 9 pare și 10 impar.

3. Scrieți toate numerele pare de trei cifre distincte folosind cifrele: 0; 3; 4.

Rezolvare: 304; 430; 340.



11. Găsiți 3 numere naturale care să se bucure de proprietatea că suma cifrelor sale este egală cu produsul cifrelor. Sunt multe asemenea numere?

Rezolvare:

De exemplu, numărul 123 satisfac condiția pentru că $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, dar și numerele 132, 231, 213, 312 și 321 satisfac condiția. Observăm că dacă numărul conține, de exemplu, cifrele 5 și 6, atunci el trebuie să conțină și $5 \cdot 6 - (5 + 6) = 19$ cifre egale cu 1. Dacă conține, de exemplu, cifrele 2, 3 și 7, atunci el trebuie să conțină și $2 \cdot 3 \cdot 7 - (2 + 3 + 7) = 42 - 12 = 30$ cifre de 1 etc. Sau mai general; dacă numărul conține cifrele a și b din sistemul zecimal de numerație, atunci el trebuie să conțină și $a \cdot b - (a + b)$ cifre egale cu 1, unde $a \geq 2$ și $b \geq 2$, etc. Conchidem că sunt oricât de multe numere cu proprietatea dată.

PROBLEME PROPUSE

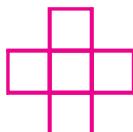
- Sunt singurul număr impar cuprins între numerele 54 și 62 și, de asemenea, cuprins între 60 și 65. Cine sunt?
- Sunt singurul număr par cuprins între numerele 39 și 46 și, de asemenea, cuprins între 43 și 48. Cine sunt?
- a)** Câte cifre trebuie să aibă un număr natural, astfel încât să poată avea suma cifrelor sale egală cu 10? **b)** Dar pentru a avea suma cifrelor egală cu 20?
- Scrie în ordine descrescătoare toate numerele de două cifre cu diferența cifrelor 4.
- Scrie în ordine crescătoare toate numerele de două cifre diferite ce au suma cifrelor egală cu 6.
- Completează cu numere 2, 4, 6, 8, 10 în aşa fel încât suma numerelor de pe linie și de pe coloană să fie aceeași.
- Completați jocurile astfel încât să obțineți rezultate exacte pe orizontală și pe verticală.

a)

20	-	10	=	
+	[gray]	+	[gray]	+
	-		=	
=	[gray]	=	[gray]	=
28	-		=	12

b)

	-	8	=	8
+	[gray]	+	[gray]	+
	-	6	=	
=	[gray]	=	[gray]	=
24	-		=	



- Un medic prescrie unui pacient 7 pastile pe care le ia din jumătate în jumătate de oră. De câte ore are nevoie pacientul pentru a lua toate pastilele?

CAPITOLUL III

„Matematica se face oriunde, oricând și oricum.“

Grigore Moisil

PROPRIETĂȚILE ADUNĂRII ȘI ÎNMULTIRII NUMERELE NATURALE. FACTOR COMUN. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR ȘI FOLOSIREA PARANTEZELOR

Rețineți:

❖ Proprietățile adunării numerelor naturale

- ⇒ Adunarea este **comutativă** $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Exemplu: } & 8 + 9 & = 9 + 8 & & & & \end{array}$$

- ⇒ Adunarea este **asociativă** $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a , b și c .

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Exemplu: } & (20+35)+15 & = 20+(35+15) & & & & \end{array}$$

- ⇒ 0 este **element neutru** pentru $a + 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a .
adunarea numerelor naturale

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Exemplu: } & 3 + 0 & = 3 & & \end{array}$$

- ⇒ Putem utiliza proprietățile adunării pentru a efectua calcule rapide:

Exemple:

Calculați cât mai rapid:

- a) $3125 + 1745$; b) $57 + 63 + 21 + 79 + 37 + 43$.

Rezolvare:

a) $3125 + 1745 = (3100 + 25) + (1700 + 45) = (3100 + 1700) + (25 + 45) = 4800 + 70 = 4870$.

b) $57 + 63 + \underline{\underline{21 + 79 + 37 + 43}} = (57 + 43) + (63 + 37) + (21 + 79) =$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1cm}} \\ \overbrace{\hspace{1cm}} \end{array}$$

$$= 100 + 100 + 100 = 100 \cdot 3 = 300.$$

❖ Proprietățile înmulțirii numerelor naturale

- ⇒ Înmulțirea este **comutativă** $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & & & & & \end{array}$$

$$\text{Exemplu: } 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3$$

- ⇒ Înmulțirea este **asociativă** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a , b și c .

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & & & & & \end{array}$$

$$\text{Exemplu: } (3 \cdot 10) \cdot 5 = 3 \cdot (10 \cdot 5)$$

CAPITOLUL VI

„Sârguină nu ne ajunge, din
păcate trebuie ceva mai mult, o idee.“
(W. Blasch)

SUME DE TIP GAUSS

⌚ Să observăm!

Considerăm suma primelor 20 de numere naturale nenule: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20$.

Observăm că suma termenilor 1 și 20 este 21, termenii 2 și 19 au suma tot 21, la fel ca 3 și 18, și.a.m.d.

Scriind suma S în două moduri, odată cu termenii în ordine crescătoare și odată cu termenii în ordine descrescătoare obținem:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20$$

$$S = 20 + 19 + 18 + \dots + 3 + 2 + 1$$

Adunând cele două egalități parte cu parte, obținem: $S + S = 2S = (1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + \dots + (18 + 3) + (19 + 2) + (20 + 1) = 21 + 21 + \dots + 21$, sau $2 \cdot S = 20 \cdot 21$ de unde $S = (20 \cdot 21) : 2$.

20 termeni

Folosind aceeași idee putem calcula, suma primelor n numere naturale nenule, oricare ar fi n număr natural.

Să calculăm suma primelor n numere naturale nenule folosind aceeași idee:

$$\left. \begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \end{aligned} \right\} \oplus \text{implică}$$

$$2 \cdot S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{\text{de } n \text{ ori}}, \text{ de unde } S = [n \cdot (n+1)] : 2.$$

⌚ Putem concluziona că $1 + 2 + 3 + \dots + n = [n(n+1)] : 2$.

Dacă vom avea de calculat suma primelor 100 de numere naturale nenule, atunci conform regulii de mai sus avem că: $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 100 \cdot (100 + 1) : 2 = 5050$. Acest mod ingenios de a aplica proprietățile adunării (**asociativitatea și comutativitatea**) a fost descoperit de un copil. Acest copil, care ulterior a devenit unul dintre marii matematicieni ai lumii, se numea **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855).

Într-o zi, făcând o șotie, a fost pedepsit să stea în genunchi la vestitul colț cu grăunțe, până va aduna mintal toate numerele naturale de la 1 la 100 inclusiv. Înainte de a ajunge la colțul cu pricina pentru a-și executa pedeapsa, copilul în al doilea an de școală primară i-a dat rezultatul: 5050.

Metoda II

Este o metodă care spre deosebire de prima metodă se poate aplica și în cazul celorlalte subpunete. Pentru început este necesar să aflăm numărul de termeni ai sumei. Acest număr în cazul sirurilor de sume cu „salt constant” (diferența dintre orice doi termeni consecutivi este aceeași) este dat de formula $n = (u - p) : d + 1$, unde u este ultimul număr, p este primul număr, iar d este distanța dintre doi termeni consecutivi. Așadar, în cazul nostru, numărul de termeni al sumei este $(100 - 2) : 2 + 1 = 50$. Vom scrie suma o dată crescător și o dată descrescător, după care le vom aduna termen cu termen:

$$\begin{aligned} A &= 2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100 \\ A &= 100 + 98 + 96 + \dots + 6 + 4 + 2 \\ 2 \cdot A &= \underbrace{102 + 102 + 102 + \dots + 102 + 102}_{\text{de 50 ori}}. \end{aligned}$$

Prin urmare, $A = (102 \cdot 50) : 2 = 51 \cdot 50 = 2550$.

b) Vom completa cu termenii care lipsesc până la o **sumă Gauss** completă, după care vom scade suma acestor termeni pentru a nu influența valoarea sumei inițiale. Prin urmare $B = (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + \dots + 20) - (1 + 2 + 3 + 4) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 20) - (4 \cdot 5) : 2 = (20 \cdot 21) : 2 - 10 = 200$.

c) Vom aduna și apoi vom scade termenii care lipsesc pentru a avea o **sumă Gauss** completă. Așadar, $C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 98 + 99 - (2 + 4 + 6 + \dots + 98) = (99 \cdot 100) : 2 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 49) = 99 \cdot 50 - 2 \cdot (49 \cdot 50) : 2 = 99 \cdot 50 - 49 \cdot 50 = 50 \cdot (99 - 49) = 50 \cdot 50 = 2500$.

Metoda II: Observăm că toți termenii sumei sunt numere naturale impare consecutive, deci putem scrie: $C = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \dots + (2 \cdot 49 + 1) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{50 \text{ termeni}} + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 49 = 50 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 49) = 50 + 2 \cdot (49 \cdot 50) : 2 = 50 + 49 \cdot 50 = 50 \cdot (1 + 49) = 2500$.

d) Metoda I:

Este de fapt **Metoda II** de la a). Observăm că avem de a face cu un sir de numere cu salt constant, în care $u = 51$, $p = 1$, $d = 5$ și numărul de termeni $(51 - 1) : 5 + 1 = 11$.

$$\begin{aligned} D &= 1 + 6 + 11 + \dots + 41 + 46 + 51 \\ D &= 51 + 46 + 41 + \dots + 11 + 6 + 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{de unde} \\ \oplus \end{array} \right. \quad 2D = \underbrace{52 + 52 + 52 + \dots + 52 + 52}_{\text{de 11 ori}},$$

deci $D = (52 \cdot 11) : 2 = 26 \cdot 11 = 286$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

5. Calculați următoarele sume:

a) $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20;$

b) $B = 0 + 1 + 2 + \dots + 89;$

c) $C = 200 + 199 + 198 + \dots + 2 + 1;$

d) $D = 999 + 998 + 997 + \dots + 2 + 1.$

6. Calculați:

a) $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 78 + 80;$

b) $B = 3 + 6 + 9 + \dots + 147 + 150;$

c) $C = 0 + 5 + 10 + \dots + 145 + 150;$

d) $D = 11 + 22 + 33 + \dots + 242 + 253;$

e) $E = 7 + 8 + 9 + \dots + 45 + 46;$

f) $F = 33 + 34 + 35 + \dots + 79 + 80.$

7. Să se calculeze sumele următoare:

a) $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 47 + 49;$ c) $C = 4 + 9 + 14 + \dots + 104 + 109;$

b) $B = 1 + 4 + 7 + \dots + 97 + 100;$ d) $D = 600 + 596 + 592 + \dots + 328 + 324.$

8. Calculați:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 2014 - 1001 - 1002 - \dots - 1014 - 500500 =$

b) $3 + 5 + 7 + \dots + 2013 - 2 - 4 - 6 - \dots - 2012 =$

9. Comparați numerele a și b , unde:

a) $a = 2012 - 2011 + 2010 - 2009 + \dots + 2 - 1;$

b) $b = 2012 - 2010 + 2008 - 2006 + \dots + 8 - 6 + 4 - 2.$

10. Comparați numerele a și b , unde: $a = 100 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 102)$ și $b = 102 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100).$ *(etapa locală, Iași 1998)*

11. Aflați x din relațiile de mai jos:

a) $2x + 4x + 6x + \dots + 4028x = 2014 \cdot 2015;$

b) $x + 3x + 5x + \dots + 2013x = 2x + 4x + 6x + \dots + 2012x + 3021.$

12. Aflați-l pe x din relația de mai jos:

$$x \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2014) - (1 + 3 + 5 + \dots + 2013) \cdot x = 2014 \cdot 2016.$$

13. Câtă termeni are sirul $1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \underbrace{32, 32, \dots, 32}_{\text{de 32 ori}}$?

14. Calculați suma:

$$S = 1000 \cdot 999 - 999 \cdot 998 + 998 \cdot 997 - 997 \cdot 996 + \dots + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1.$$

15. Calculați:

$$S = 99 - 100 + 101 - 102 + 103 - 104 + \dots + 997 - 998 + 999 - 1000 + 1001.$$

16. La stadion se întâlnesc 8 colegi. Fiecare dă mâna o singură dată cu fiecare coleg. Câte străneri de mâna au loc?



CAPITOLUL IX

„În matematică nu există un drum special pentru regi.“

Euclid

OLIMPIADE, CONCURSURI JUDEȚENE ȘI INTERJUDEȚENE, SUBIECTE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CLASA I

1 Concursul „Florica T. Câmpan“, etapa municipală, Iași, 2005, ediția a V-a

- I. Descoperiți regula și completați sirul:

$$3 \quad \boxed{} \quad 7 \quad 9 \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad 15$$

- II. 1. În aceeași formă înlocuiește în fiecare caz același număr. Completați:

$$\boxed{} + \boxed{} = 16$$

$$\triangle - 7 = \square$$

$$\triangle + \square = \circ$$

2. De câte ori apare cifra 3 în toate numerele de la 1 la 34 (inclusiv)?

- III. 1. Ana și încă patru colegi ai săi vin să o ajute la culesul merelor. Fiecare copil primește câte un coș în care încap 4 kilograme de mere și pe care îl umple o singură dată. Câte kilograme de mere au cules Ana și colegii săi?

2. Patru cătei pleacă în același timp și aleargă 12 kilometri într-o oră. Cât aleargă un singur cătel într-o oră?

- IV. 1. Din suma numerelor 24 și 3 scade vecinul mic al lui 4 și adună vecinul mare al lui 5.

2. Găsește numerele potrivite și toate variantele, după model:

$$\begin{array}{c} \boxed{} = \boxed{} < \boxed{3} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{} \quad \boxed{} \\ \downarrow \\ \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{1} = \boxed{1} < \boxed{3} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{5} = \boxed{5} = \boxed{5} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{10} \quad \boxed{10} \\ \downarrow \\ \boxed{20} \end{array}$$

**42 Concursul interjudețean „Dimitrie Pompeiu“, ediția a XVIII-a,
Botoșani, 2018**

1. Dacă într-o sală de clasă se aşază câte un elev în fiecare bancă, rămân 9 elevi fără loc în bancă. Dacă se aşază câte doi în bancă, rămân 6 bănci goale. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă? *(Gazeta Matematică)*
2. Un număr natural se împarte la 4 și dă restul 3. Câțul împărțirii se împarte din nou la 4 și dă restul 3. Noul cât se împarte din nou la 4 și dă câtul 3 și restul 2. Care a fost numărul inițial? *(Mariana Ciobănașu)*
3. O vulpe a zărit un iepuraș la 86 metri în fața sa. Cât timp vulpea face 3 salturi de câte 2 metri fiecare, iepurașul face 4 salturi de câte un metru fiecare.
- a) Câți metri va parcurge vulpea până va prinde iepurașul? Justificați.
b) Câți metri va parcurge iepurașul până este înățat de vulpe?



4. **Problemă suplimentară.** Produsul vîrstelor a patru copii din familia Popescu exprimate prin numere naturale este egal cu 360, iar suma vîrstelor acestora nu depășește 46 de ani. Aflați câți ani are fiecare copil dacă doi dintre ei sunt gemeni, cel mare este elev preiant, iar cel mic are părul roșcat. *(Artur Bălăucă)*

**43 Concursul interjudețean „Dimitrie Pompeiu“, ediția a XIX-a,
Botoșani, 2019**

1. Alina are de șase ori mai mulți bani decât jumătate din suma de bani pe care o are Mihnea. Ce sumă de bani are fiecare dacă Alina are cu 200 de lei mai mult decât Mihnea? *(xxx)*
2. a) Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 4, numărul obținut este cu 9 mai mic decât numărul care se obține dacă scriem cifra 4 la sfârșitul lui. Care este acel număr?
b) Care este numărul format din trei cifre consecutive care adunat cu răsturnatul său dă 888? *(G.M. Nr. 1/2019)*

SOLUȚII. INDICAȚII. RĂSPUNSURI. COMENTARII.

MODELE DE PROBLEME REZOLVATE

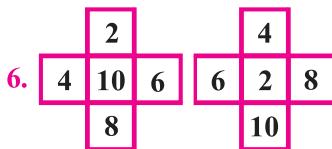
Cugetare: „Gândul este un fulger între două răstimpuri de beznă, dar acest fulger e total.“

Henri Poincaré

CAPITOLUL I. SISTEME DE NUMERAȚIE.

I.2. SISTEMUL ZECIMAL DE NUMERAȚIE

- 1.** 61. **2.** 44. **3.** a) cel puțin două cifre; b) cel puțin trei cifre. **4.** 95, 84, 73, 62, 51, 40. **5.** 15, 24, 42, 51.



7. a)

20	-	10	=	10
+		+		+
8	-	6	=	2
=		=		=
28	-	16	=	12

b)

16	-	8	=	8
+		+		+
8	-	6	=	2
=		=		=
24	-	14	=	10

- 8.** 3 ore. **9.** 1. **10.** 5. **11.** a) $4 + (4 + 4) + 1 = 13$; b) La concurs participă $13 - 7 = 6$ băieți, iar în fața lui Victor se află un băiat ($6 - (4 + 1)$). **12.** a) 5 tăieturi (6 bucăți); b) 11 tăieturi (12 bucăți); c) 3 tăieturi (4 bucăți). Pentru ultimele două bucăți de fiecare dată, efectuează o singură tăietură. **13.** a) 29; b) 899. **14.** a) 931865; b) 917865. **15.** Sunt 18 numere. **16.** a) Numerele sunt de forma $293ab$, unde a și b iau câte 10 valori, deci sunt $10 \cdot 10 = 100$ de numere; b) Numerele sunt de forma $cd293$, unde c ia 9 valori, iar b ia 10 valori. Deci, sunt $9 \cdot 10 = 90$ de numere. **17.** Numerele care au suma cifrelor 4 sunt: 4000, 3001, 3010, 3100, 2002, 2020, 2200, 2011, 2101, 2011, 1003, 1030, 1300, 1012, 1021, 1102, 1201, 1120, 1210, 1111. Sunt 20 de numere. Numerele care au produsul cifrelor 12 conțin cifrele: 1, 1, 2, 6 sau 1, 1, 3, 6 sau 1, 2, 2, 3 etc. **18.** Numerele sunt: 1279, 1369, 1378, 1459, 1468, 1567, 2359, 2368, 2458, 2467, 3457. **19.** a) Fie a și $a + 1$ numerele căutate. Notăm cu u.c.(a) ultima cifră a numărului a . Dacă u.c.(a) = 0 atunci $u.c.(a(a + 1)) = u.c.(0 \cdot 1) = 0$. Dacă u.c.(a) = 1 atunci $u.c.(a(a + 1)) = u.c.(1 \cdot 2) = 2$. Analog vom analiza celelalte opt cazuri și găsim că u.c.($a(a + 1)$) este 0, 2 sau 6; b) $u.c.(5b + 3) \in \{3; 8\}$ și cum u.c.($a(a + 1)$) este 0, 2 sau 6 rezultă că egalitatea $a(a + 1) = 5b + 3$ nu poate avea loc. **20.** c) $A + B = 10a + 18b + 13 \Rightarrow A + B$ este impar \Rightarrow unul dintre ele va fi par iar celălalt impar $\Rightarrow A \cdot B$ va fi par. **21.** a) impar; b) par; c) impar. **22.** Se analizează cele 4 cazuri: I. a, b – pare: $a + b =$ par, $a - b =$ par. II. a – par, b – impar: $a + b =$ impar, $a - b =$ impar. III. $a =$ impar, b = par: $a + b$ – impar, $a - b$ = impar. IV. a – impar, b – impar: $a + b$ – par, $a - b$ = par. Concluzia: $a - b$ și $a + b$ au aceeași paritate. **23.** $A + B = 10a + 18b + 13 \Rightarrow A + B$ este impar \Rightarrow unul dintre numerele A și B va fi par iar celălalt impar $\Rightarrow A \cdot B$ va fi impar. **24.** Dacă a și b sunt numere impare atunci $a + b =$ număr par $\Rightarrow (a + b) : 2$ este număr natural; b) $(a + b) : 2 + (b + c) : 2 + (c + a) : 2 = (a + b + b + c + c + a) : 2 = (2a + 2b + 2c) : 2 = a + b + c =$ impar. Cum $(a + b) : 2$, $(b + c) : 2$ și $(c + a) : 2$ sunt numere naturale, ori unul, ori toate trei numerele $(a + b) : 2$, $(b + c) : 2$,

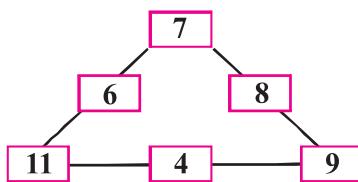
**CAPITOLUL III. PROPRIETĂȚILE ADUNĂRII ȘI ÎNMULȚIRII
NUMERELE NATURALE. FACTOR COMUN. ORDINEA
EFFECTUĂRII OPERAȚIILOR ȘI FOLOSIREA PARANTEZELOR**

- 1.** a) 15; b) 3; c) 3; d) 9; e) 8; f) 18. **2.** a) 465; b) 25; c) 55; d) 596; e) 6200; f) 123. **3.** a) 22; b) 9; c) 9; d) 80; e) 4. **4.** a) $3 + 5 \cdot \{82 + 3 \cdot [21 + 4 \cdot (24 - 9)]\} = 3 + 5 \cdot [82 + 3 \cdot (21 + 4 \cdot 15)] = 3 + 5 \cdot (82 + 3 \cdot 81) = 3 + 1625 = 1628$; b) $\{15 + 2 \cdot [4 + 3 \cdot (270 + 27 - 5 - 5) - 1400]\} \cdot 3 = [15 + 2 \cdot (4 + 3 \cdot 282) - 1400] \cdot 3 = (15 + 1700 - 1400) \cdot 3 = 315 \cdot 3 = 945$; c) $42 + 18 \cdot [50 + 3 \cdot (21 + 2 \cdot 145 - 24) - 900] - 43 = 42 + 18 \cdot (50 + 3 \cdot 287 - 900) - 43 = 42 + 18 \cdot 11 - 43 = 197$; d) $2013 + (989 + 993 - 343) = 3652$; e) $70 + 2 \cdot [9 + 3 \cdot (30 + 3 \cdot 27)] = 70 + 2 \cdot (9 + 333) = 754$; f) $2014 - [2012 - (2012 - 1)] = 2014 - (2012 - 2011) = 2013$. **5.** a) $[(15 + 21) \cdot 2 + 9] \cdot 3 - (20 \cdot 4 - 50) = 213$; $81 \cdot 3 - 30 = 213$; $243 - 30 = 213$ (adevărat); b) $10 \cdot [2 + 10 \cdot (140 + 5 \cdot 125)] - 1913 \cdot 40 = 0$; $10 \cdot (2 + 10 \cdot 765) - 76520 = 0$; $10 \cdot 7652 \cdot 76520 = 0$ (adevărat); c) Avem $50 + 45 \cdot [(206 - 30 + 32 : 8) : 18] + 12 = 2014$ sau $50 + 45 \cdot (180 : 18) + 12 = 2014$ sau $50 + 450 + 12 = 2014$, adică $512 = 2014$ (fals); d) $4 \cdot (444 + 1110) - 12 \cdot [(16 - 4) - 50 : 5] = 56 \cdot 111 - 24$ sau $4 \cdot 1554 - 12 \cdot 2 = 56 \cdot 111 - 24$ sau $6216 - 24 = 6216 - 24$ (adevărat). **6.** a) $a + b + c = a + (b + c) = 5 + 12 = 17$; b) $5a + 2b + 2c = 5 \cdot 5 + 2(b + c) = 25 + 2 \cdot 12 = 49$; c) $ab + ac + 11b + 11c = a(b + c) + 11(b + c) = 5 \cdot 12 + 11 \cdot 12 = 192$; d) $2ab + 2ac + 9 = 2a(b + c) + 9 = 2 \cdot 5 \cdot 12 + 9 = 129$; e) $2ab + 2ac + 3b + 3c + 8 = 2a(b + c) + 3(b + c) + 8 = 2 \cdot 5 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + 8 = 164$. **7.** $6a + 14b - 3c = 6a + 8b + 6b - 3c = 2(3a + 4b) + 3(2b - c) = 2 \cdot 15 + 3 \cdot 3 = 39$. **8.** $\{[(1 + 2) : 3 + 4] : 5 + 6\} : 7 + 8\} : 9 + 10 = 11$. **9.** $2004 = (1111 - 111) \cdot (1+1) + 1+1+1+1$; $2004 = (999 + 9 : 9) \cdot (9+9) : 9 + (9+9+9+9) : 9$; $2004 = 333 \cdot (3+3) + 3+3$. **10.** $8 \times (5 + 9 : 3) = 64$. **11.** $(7 + 7) \cdot 7 + 7 : 7 + 7 : 7 = 100$.

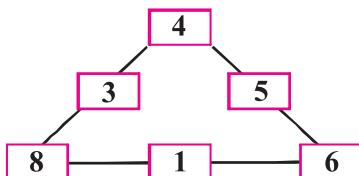
12.

9	+	9	-	9	-	9	=	0
9	-	9	+	9	-	9	=	0
9	x	9	-	9	x	9	=	0
9	:	9	-	9	:	9	=	0
9	x	9	:	9	-	9	=	0
9	:	9	x	9	-	9	=	0

13.



14.



4. Metoda figurativă

- reprezintă suma inițială din pușculița lui Gigel.

- reprezintă suma inițială din pușculița lui Ionel.

$$\text{Avem: } \begin{array}{l} \text{circle} + 200 \text{ lei} = \begin{cases} \text{square} - 200 \text{ lei} \\ \text{square} - 200 \text{ lei} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{circle} + 800 \text{ lei} = \text{square} \\ \text{circle} - 200 \text{ lei} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{circle} - 200 \text{ lei} = \begin{cases} \text{square} + 200 \text{ lei} \\ \text{square} + 200 \text{ lei} \end{cases} \\ \Rightarrow \text{circle} = \begin{cases} \text{square} + 600 \text{ lei} \\ \text{square} \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Deci } \begin{array}{l} \text{square} + (600 \text{ lei} + 800 \text{ lei}) = \text{square} \\ \text{square} \\ \text{square} \end{array}$$

Prin urmare $\boxed{\square} = 1400$ lei și, $\text{circle} = 1400 \cdot 2 + 600 = 3400$ lei și lui Gigel îi mai rămân în pușculiță 2100 lei, iar lui Ionel 100 lei.

101. Concursul „Viitorii olimpiici”, 2019

1. Avem relațiile: $\overline{abc} = 29n + (n+1)$, $n+1 < 29$ sau $\overline{xyz} = 29 \cdot (p+1) + p$, $p < 29$.

$\overline{abc} = 30n + 1$, unde $100 \leq 30n + 1 \leq 999 \Leftrightarrow 99 \leq 30n \leq 998 \Leftrightarrow 4 \leq n \leq 33$; sunt $33 - 3 = 30$ de numere.

$\overline{xyz} = 30p + 29$, unde $100 \leq 30p + 29 \leq 999 \Leftrightarrow 71 \leq 30p \leq 970 \Leftrightarrow 3 \leq p \leq 32$; sunt $32 - 2 = 30$ de numere. În concluzie, sunt 60 de numere cu proprietățile din enunț.

2. Descompunem curtea școlii în pătrate cu latura de 7 m. Obținem astfel $6 \times 5 = 30$ de pătrate cu latura de 7 m și cu aria de 49 metri pătrați. Cum în clasă sunt 31 de elevi, conform **principiului cutiei**, există cel puțin 2 elevi care se află pe o suprafață pătrată cu aria de 49 metri pătrați.

3. $a = 1 \Rightarrow b + c = \text{impar}$.

– dacă b ia valorile: 0; 2; 4; 6 sau 8, de fiecare dată c ia valorile: 1; 3; 5; 7 și, respectiv, 9 – sunt $5 \times 5 = 25$ de numere.

– dacă b ia valorile: 1; 3; 5; 7; 9, de fiecare dată c ia valorile: 0; 2; 4; 6; 8 – sunt $5 \times 5 = 25$ de numere. Prin urmare, dacă a ia valorile 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, de fiecare dată se obțin câte 50 de numere care au suma cifrelor pară.

Deci sunt în total $50 \cdot 9 = 450$ de numere de forma \overline{abc} care au suma cifrelor număr par.

Soluție rapidă: Sunt 900 de numere de forma \overline{abc} , dintre care 450 au suma cifrelor pare și 450 au suma cifrelor impare.